Observaciones sobre la segunda relación de ejercicios de casa

Seguidamente comento lo que más me ha llamado la atención en esta segunda entrega de ejercicios de casa.

Algunos todavía insistís en usar decimales y grados. Repito que en esta asignatura no se usan decimales, los cálculos que no pueden hacerse de forma exacta se dejan indicados, y tampoco se usan grados sino radianes.

Me ha llamado mucho la atención que en el último ejercicio en el que se preguntaba por el error en la cadena de igualdades:

$$i = (-1)^{1/2} = [(-1)^3]^{1/2} = (-1)^{3/2} = i^3 = -i$$

muchos responden que es debido a que se considera el número -1 como número real, cuando debe ser considerado complejo porque las raíces negativas de números reales no existen... Otros dicen cosas mucho peores que no sé dónde pueden haberlas oído (no a mi, desde luego), como que la unidad imaginaria, i, es tratada en esas igualdades como un número natural y otros despropósitos. No sé qué pensar de esto. Hay que tener en cuenta que se trata del último ejercicio de una relación dedicada toda ella a los números complejos, después de haber hecho ejercicios en los que se han calculado raíces y logaritmos de números complejos. Por supuesto que, a estas alturas, el número "i" que aparece en esas igualdades es un número complejo que, además, es igual al valor principal de la raíz cuadrada del número (complejo) -1, esto es, $i = \sqrt{-1}$. Por supuesto que $i^2 = -1$, aunque hay quien lo duda. Por supuesto que $(-1)^{1/2} = \sqrt{-1} = i$, aunque hay quien afirma que $(-1)^{1/2}$ es igual a $\{i, -i\}$ ¡un conjunto!

En todo esto hay muchas confusiones debido a que no se entendieron correctamente las observaciones que hice cuando empezamos la lección de los números complejos. Lo que dije entonces es que en muchos libros, ***antes de haber definido los números complejos***, se ***define*** $i = \sqrt{-1}$, y eso es completamente disparatado porque, ***antes de haber definido los números complejos***, la función raíz cuadrada solamente está definida en los reales positivos y no tiene sentido ninguno definir $i = \sqrt{-1}$. Una vez construidos los números complejos y definidas las raíces n-ésimas de un número complejo, resulta que todo número complejo $z \neq 0$ tiene n raíces n-ésimas distintas. En particular, los números reales negativos (cuando los vemos como números complejos, o sea, trabajando con ellos dentro de $\mathbb{C}$) tienen dos raíces cuadradas y se comprueba que $i = \sqrt{-1}$ (valor principal de la raíz cuadrada de -1). Lógicamente esa igualdad $i = \sqrt{-1}$ ya pueda usarse siempre que se quiera porque su sentido ha quedado claramente precisado.

Realmente lo que pasa es que con la función "raíz cuadrada" tenéis muchísimos problemas y aceptáis que con ella se puede hacer cualquier cosa. Os pongo un ejemplo. En vez de *definir* $i = \sqrt{-1}$ imaginaros que, ***antes de construir*** $\mathbb{C}$, *defino* $i = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\log(-1)}$. Seguro que protestaríais: los números negativos no tiene logaritmo. Pues claro que no. Exactamente igual que no tienen raíz cuadrada. Ni más ni menos. ***Una vez que se ha construido el cuerpo de los números complejos, entonces ya sí es verdad que los números negativos tienen logaritmos y raíces cuadradas, pero no antes***.

Hay muchos despistes al calcular módulos que proceden del siguiente error:

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + (iy)^2} = \sqrt{x^2 - y^2}$$

Eso lleva a alguno a afirmar que $|1 + i| = 0$. Hay otros errores frecuentes. Por ejemplo, para números complejos no es verdad que $|z| = |w| \Longleftrightarrow z^2 = w^2$. Eso es cierto para números reales pero no lo es cuando z y w son complejos, pues en este caso lo correcto es $|z| = |w| \Longleftrightarrow z\overline{z} = w\overline{w}$. Además, para complejos no es verdad que $|z| = \sqrt{z^2}$, sino que $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$. Algunos obtienen módulos negativos y otros calculan módulos que resultan ser números complejos. Todo esto no pasaría si uno se aprende bien la definición de módulo que es absolutamente elemental.

Muy pocos saben reconocer la ecuación de una circunferencia en el plano. Por cierto, en el plano no hay "esferas". Cuando se obtiene una condición del tipo $f(x, y) = 0$, si no se sabe reconocer la curva que representa esa ecuación, se deja indicado y no se debe intentar "resolverla".

Las lecturas obligatoria se supone que deben ser leídas. Pues no. Algunos, bastantes, no sabéis resolver una ecuación de segundo grado, lo cual está muy bien explicado en una de las lecturas que os indicaba.

Un *error que se repite mucho* es el siguiente:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2$$

Sin comentarios.

Muchos no se han dado cuenta de que los números reales positivos tienen argumento principal 0 y los negativos tienen argumento principal π. El número $-5\,\mathrm{e}$ es un número real negativo, su módulo es $5\,\mathrm{e}$ y su argumento principal π.

Observad que usamos igual notación para el logaritmo complejo y el logaritmo real. Eso es coherente y obligado. En la igualdad $\log z = \log(|z|) + i\arg(z)$, el logaritmo que hay a la izquierda, $\log z$, es el logaritmo complejo, y el que hay a la derecha, $\log(|z|)$, es la función logaritmo real, es el logaritmo natural (algunos prefieren llamarle neperiano) del número real positivo $|z|$. Cuando, en particular, resulta que el complejo z es un número real positivo, $z = x \in \mathbb{R}^+$, se tiene que la igualdad $\log z = \log(|z|) + i\arg(z)$ queda reducida a $\log x = \log x$, que se interpreta de la forma evidente: el logaritmo de un número real positivo es el mismo si consideramos dicho número real en $\mathbb{R}$ que si lo consideramos en $\mathbb{C}$. Si usáramos la notación ln para el logaritmo natural sería también obligado usarla para el logaritmo complejo (para evitar igualdades como $\log x = \ln x$, distinta notación para una misma cosa). Por supuesto, $\log 1 = 0$ y $\log(\mathrm{e}^{-3}) = -3$. ¿Alguien lo duda?

Los números complejos de módulo 1 son todos los puntos de la circunferencia unidad. Hay muchos, infinitos. Algunos piensan que si z es un número complejo y $|z| = 1$ entonces $z = 1$ o $z = -1$. Vuelven a confundir el módulo de un complejo con el valor absoluto de un número real. Pues no: $|z| = 1 \iff x^2 + y^2 = 1$. Los números complejos de módulo 1 puestos en forma polar son los números de la forma $\cos t + i \operatorname{sen} t$ donde $t \in \mathbb{R}$, que podemos escribir más fácilmente usando la exponencial compleja como $\mathrm{e}^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t$. Es evidente que $t \in \operatorname{Arg}(\mathrm{e}^{it})$ pero no tiene por qué ser $t = \arg(\mathrm{e}^{it})$, eso solamente será cierto cuando $-\pi < t \leqslant \pi$. Muy poquitos, no más de cuatro, habéis calculado correctamente el logaritmo principal de e^{5i}. Hay afirmaciones para todos los gustos: $\left|\mathrm{e}^{5i}\right| = 5$, $\left|\mathrm{e}^{5i}\right| = 5\,\mathrm{e}$, $\left|\mathrm{e}^{5i}\right| = 5i$, $\arg(\mathrm{e}^{5i}) = \pi/2$, etcétera.

La notación 1_ϑ que algunos usáis para representar el número complejo $\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta$ es malísima. Es mejor usar la exponencial.

Pero donde se producen más errores es al calcular argumentos principales. Realmente debe ser muy complicado aplicar la fórmula correctamente y quizás se necesiten dos cursos para aprenderla. ¡Son tres posibilidades nada menos! Que z esté en el semiplano de la derecha o que esté en el segundo o en el tercer cuadrantes… ¡Demasiado! ¿Quién puede estudiarse tal cosa? Es realmente muy difícil. Bueno, si no calculas bien argumentos principales no podrás calcular tampoco potencias, raíces ni logaritmos, es decir, no podrás trabajar con números complejos. Muchos errores se pueden evitar fácilmente representando gráficamente el número cuyo argumento principal queremos calcular. Un error típico es olvidarse de los signos de los números x e y al calcular $\operatorname{arc\,tg}(y/x)$; si $z = -1 - i$ entonces $x = y = -1$, si $z = -1 + i$ entonces $x = -1$, $y = 1\ldots$

La forma (x, y) para representar el número complejo $x + iy$ está prohibida. Solamente se usa al principio cuando se definen los números complejos como vectores del plano con una operación especial de multiplicación.

Como he dicho antes, muchos cálculos pueden dejarse indicados de forma simbólica cuando no sabemos su resultado exacto, pero debéis simplificar todo lo que es fácil de simplificar. Por ejemplo, los valores de $\operatorname{sen}(\pi/3)$, $\operatorname{sen}(\pi/6)$, $\operatorname{sen}(\pi/4)$, $\operatorname{sen}(k\pi/2)$, $\operatorname{sen}(k\pi)$ (donde $k \in \mathbb{Z}$), y los valores análogos para el coseno o la tangente o el arcotangente, debéis conocerlos y usarlos para simplificar. Y no debéis olvidar las relaciones $\operatorname{sen}(x+\pi) = -\operatorname{sen} x$, $\cos(x+\pi) = -\cos x$, $\operatorname{sen}(x+\pi/2) = \cos x$, $\cos(x+\pi/2) = -\operatorname{sen} x$.

Confío que en la próxima entrega los resultados sean mejores.

Granada, 2 de noviembre de 2008